2.8.12 Třetí odmocnina

Předpoklady: 020811

Srovnání druhé a třetí mocniny	
Druhá mocnina	**Třetí mocnina**
$x^2 = x \cdot x$	$x^3 = x \cdot x \cdot x$
obsah čtverce: $S = a^2$	objem čtverce: $V = a^3$
nezáporné číslo	libovolné reálné číslo
u mocnin 10 (10; 100; …) zdvojnásobí počet nul (jednotky obsahu)	u mocnin 10 (10; 100; …) ztrojnásobí počet nul (jednotky objemu)
u desetinných čísel (0,1; 0,01; …) zdvojnásobí počet desetinných míst (jednotky obsahu)	u desetinných čísel (0,1; 0,01; …) ztrojnásobí počet desetinných míst (jednotky objemu)
$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$	$(a \cdot b)^3 = a^3 \cdot b^3$, $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$
• pro $a > 1$ platí $a^2 > a$, např. $2^2 > 2$, • pro $0 < a < 1$ platí $a^2 < a$, např. $0,5^2 < 0,5$, • pro $a < 0$ platí $a^2 > a$, např. $(-1)^2 > -1$.	• pro $a > 1$ platí $a^3 > a$, např. $2^3 > 2$, • pro $0 < a < 1$ platí $a^3 < a$, např. $0,1^3 < 0,1$, • pro $-1 < a < 0$ platí $a^3 > a$, např. $(-0,1)^3 > -0,1$, • pro $a < -1$ platí $a^3 < a$, např. $(-2)^3 < -2$,.
V tabulce jsou čísla *a* na krajích a výsledky a^2 uvnitř.	V tabulce jsou čísla *a* na krajích a výsledky a^3 uvnitř.

Př. 1: Vybarvi řádky v tabulce takto:
a) řádky, ve kterých se obě mocniny chovají stejně, nech bílé,
b) řádky, ve kterých se obě mocniny chovají podobně, vybarvi modře,
c) řádky, ve kterých se obě mocniny chovají rozdílně, vybarvi červeně.

Srovnání druhé a třetí mocniny	
Druhá mocnina	**Třetí mocnina**
$x^2 = x \cdot x$	$x^3 = x \cdot x \cdot x$
obsah čtverce: $S = a^2$	objem čtverce: $V = a^3$
nezáporné číslo	libovolné reálné číslo
u mocnin 10 (10; 100; …) zdvojnásobí počet nul (jednotky obsahu)	u mocnin 10 (10; 100; …) ztrojnásobí počet nul (jednotky objemu)
u desetinných čísel (0,1; 0,01; …) zdvojnásobí počet desetinných míst (jednotky obsahu)	u desetinných čísel (0,1; 0,01; …) ztrojnásobí počet desetinných míst (jednotky objemu)
$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$	$(a \cdot b)^3 = a^3 \cdot b^3$, $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$

• pro $a>1$ platí $a^2>a$, např. $2^2>2$, • pro $0<a<1$ platí $a^2<a$, např. $0,5^2<0,5$, • pro $a<0$ platí $a^2>a$, např. $(-1)^2>-1$.	• pro $a>1$ platí $a^3>a$, např. $2^3>2$, • pro $0<a<1$ platí $a^3<a$, např. $0,1^3<0,1$, • pro $-1<a<0$ platí $a^3>a$, např. $(-0,1)^3>-0,1$, • pro $a<-1$ platí $a^3<a$, např. $(-2)^3<-2$,.
V tabulce jsou čísla *a* na krajích a výsledky a^2 uvnitř.	V tabulce jsou čísla *a* na krajích a výsledky a^3 uvnitř.

Př. 2: Přečti vzorce.

a) $(a\cdot b)^3=a^3\cdot b^3$ b) $\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a^3}{b^3}$

a) $(a\cdot b)^3=a^3\cdot b^3$

Třetí mocnina součinu dvou čísel se rovná součinu třetích mocnin těchto čísel.

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a^3}{b^3}$

Třetí mocnina podílu dvou čísel se rovná podíl třetích mocnin obou čísel.

Př. 3: Jaký byl geometrický význam druhé odmocniny? Jaký bude geometrický význam třetí odmocniny?

Druhá odmocnina z čísla nám udává délku strany čtverce, jehož obsah udává číslo, ze kterého druhou odmocninu počítáme.

Třetí odmocnina z čísla nám udává délku hrany krychle, jehož objem udává číslo, ze kterého třetí odmocninu počítáme.

Př. 4: Doplň do tabulky alespoň devět reálných („co nejrozdílnějších“) čísel a jejich třetích odmocnin.

x									
$\sqrt[3]{x}$									

x	0	8	-1000	0,5	-0,001	1000	27	64	125
$\sqrt[3]{x}$	0	2	-10	0,125	-0,1	10	3	4	5

Př. 5: Najdi definici druhé odmocniny a uprav ji na definici třetí odmocniny.

Druhá odmocnina z nezáporného čísla *a* je takové nezáporné číslo *b*, pro které platí $b^2=a$.

Třetí odmocnina z reálného čísla *a* je takové reálné číslo *b*, pro které platí $b^3 = a$.

Pedagogická poznámka: V některých učebnicích je uváděna následující definice: Třetí odmocnina z nezáporného reálného čísla *a* je takové nezáporné reálné číslo *b*, pro které platí $b^3 = a$.
Osobně mám radši definici, která obsahuje i záporná čísla. Je z ní více patrný rozdíl mezi lichou a sudou odmocninou.

Př. 6: U kterých mocnin deseti (10; 100; 1000; …) můžeme z hlavy najít třetí odmocninu? Jak tyto třetí odmocniny vypadají? U kterých desetinných čísel tvaru 0,1; 0,01; 0,001; … najdeme snadno třetí odmocninu? Jak tyto třetí odmocniny vypadají?

Snadné odmocniny:

- $\sqrt[3]{1000} = 10$,
- $\sqrt[3]{1\,000\,000} = 100$,
- $\sqrt[3]{1\,000\,000\,000} = 1\,000$,

$\Rightarrow$ třetí odmocninu můžeme snadno spočítat z mocnin deseti, jejichž počet nul je násobek tří, odmocnina má pak třetinový počet nul.

Snadné odmocniny:

- $\sqrt[3]{0,001} = 0,1$,
- $\sqrt[3]{0,000\,001} = 0,01$,
- $\sqrt[3]{0,000\,000\,001} = 0,001$,

$\Rightarrow$ třetí odmocninu můžeme snadno spočítat z desetinných čísel tvaru 0,1; 0,01; 0,001; …, jejichž počet desetinných míst je násobek tří, odmocnina má pak třetinový počet desetinných míst.

Př. 7: Doplň tabulku.

x	2	3	4	5					
x^3					-1	64000	0,125	-27	0,027

x	2	3	4	5	-1	40	0,5	-3	0,3
x^3	8	27	64	125	-1	64000	0,125	-27	0,027

Př. 8: Přesnou hodnotu $\sqrt[3]{35}$ z hlavy neurčíme, ale můžeme ji přibližně odhadnout $3 < \sqrt[3]{35} < 4$. Zdůvodni uvedený odhad. Odhadni podobným způsobem.

a) $\sqrt[3]{6}$ b) $\sqrt[3]{100}$ c) $\sqrt[3]{20}$ d) $\sqrt[3]{150}$

Platí: $3^3 = 27 < 35 < 64 = 4^3 \Rightarrow 3 < \sqrt[3]{35} < 4$ (čísla v nerovnosti jsme nahradili jejich třetími odmocninami).

a) $1^3 = 1 < 6 < 8 = 2^3 \Rightarrow 1 < \sqrt[3]{6} < 2$

b) $4^3 = 64 < 100 < 125 = 5^3 \Rightarrow 4 < \sqrt[3]{100} < 5$

c) $2^3 = 8 < 20 < 27 = 3^3 \Rightarrow 2 < \sqrt[3]{20} < 3$

d) $5^3 = 125 < 150 < 216 = 6^3 \Rightarrow 5 < \sqrt[3]{125} < 216$

Pedagogická poznámka: U následujícího příkladu kontrolujeme společně po bodech. Mezi kontrolami nechávám krátký okamžik na vylepšení odhadu v sešitu.

Př. 9: Odhadni co nejpřesněji (na jedno desetinné místo) hodnoty odmocnin v předchozím příkladu. Na co je při odhadech třetích odmocnin třeba dát pozor?

a) $\sqrt[3]{6}$ b) $\sqrt[3]{100}$ c) $\sqrt[3]{20}$ d) $\sqrt[3]{150}$

a) $\sqrt[3]{6} = 1,7$ Správně: $\sqrt[3]{6} \doteq 1,817$.

b) $\sqrt[3]{100} = 4,6$ Správně: $\sqrt[3]{100} \doteq 4,642$.

c) $\sqrt[3]{20} = 2,6$ Správně: $\sqrt[3]{20} \doteq 2,714$.

d) $\sqrt[3]{150} = 5,3$ Správně: $\sqrt[3]{150} \doteq 5,313$

Obecně můžeme odhadnout hodnotu odmocniny pomocí dvou čísel, kterými jsme hodnotu ohraničovali v předchozím příkladu. Desetinná čísla však v rozsahu z předchozího příkladu nemůžeme rozdělovat rovnoměrně, protože menší hodnoty desetinných čísel jsou od sebe „více vzdáleny“.

Př. 10: Které ze vzorců neplatí. Neplatnost vzorce ověř dosazením vhodných čísel. Platnost zdůvodni dosazením vhodných čísel. Můžeš využít kalkulačku.

a) $\sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ b) $\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ c) $\sqrt[3]{a-b} = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ d) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

Druhá odmocnina se může „trhat“ přes násobení a dělení, naopak „nemůže se trhat“ před sčítání a odčítání $\Rightarrow$ vzorce a) a c) zřejmě platiti nebudou, vzorce b) a d) zřejmě platit budou.

Ve všech příkladech budeme místo čísel *a*, *b* dosazovat třetí mocniny (abychom snadno určili třetí odmocniny).

a) $\sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, $a = 8$, $b = 27$

- $\sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{8+27} = \sqrt[3]{35}$, $3 < \sqrt[3]{35} < 4$, protože $3^3 = 27 < 35 < 64 = 4^3$,
- $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = 2 + 3 = 5$

$\Rightarrow$ obě strany se nemohou rovnat $\Rightarrow$ vzorec jistě neplatí.

b) $\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$, $a = 8$, $b = 27$

- $\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{216}$,
- $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$,

$\Rightarrow$ obě strany se rovnají $\Rightarrow$ vzorec zřejmě platí.

c) $\sqrt[3]{a-b} = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$, $a = 27$, $b = 8$

- $\sqrt[3]{a-b} = \sqrt[3]{27-8} = \sqrt[3]{19}$, $2 < \sqrt[3]{19} < 3$, protože $2^3 = 8 < 19 < 27 = 3^3$,
- $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8} = 3 - 2 = 5$

$\Rightarrow$ obě strany se nemohou rovnat $\Rightarrow$ vzorec jistě neplatí.

d) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, $a = 64$, $b = 8$

- $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{64}{8}} = \sqrt[3]{8} = 2$,
- $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4}{2} = 2$,

$\Rightarrow$ obě strany se rovnají $\Rightarrow$ vzorec zřejmě platí.

Shrnutí: Třetí odmocnina se chová podobně jako druhá odmocnina, ale můžeme ji určovat i pro záporná čísla.